ГЛОБАЛЬНАЯ ЯДЕРНАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ, 2019 №4(33), С. 18–26

ПРОБЛЕМЫ ЯДЕРНОЙ, РАДИАЦИОННОЙ И ЭКОЛОГИЧЕСКОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

УДК 51-73, 517.965

ОДНОЗНАЧНОСТЬ РЕШЕНИЙ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В МОДЕЛИ РАДИАЦИОННОЙ ЗАЩИТЫ

© 2019 В.П. Чернявский

Саровский физико-технический институт – филиал Национального исследовательского ядерного университета МИФИ, Саров, Нижегородская обл., Россия

В статье рассматривается функциональное линейное уравнение со сдвигом в модели радиационной защиты для процессов переноса заряженных частиц и ионизирующего излучения. Целью работы является изучение вопросов существования и однозначности решений для различных случаев, которые возникают при изменении начальных параметров модели. Анализ системы, сопутствующей функциональному уравнению, проводится методами линейной алгебры. Для случая неравенства нулю главного определителя сопутствующей системы показана корректность полученных решений; функциональное уравнение имеет единственное решение. В случае равенства нулю определителя задача полностью решена для циклов длины 2. Функциональное уравнение не имеет решений, если определитель равен нулю, а ранг расширенной матрицы равен 2. Для случая совместной системы с вырожденной матрицей получены аналитические формулы общего решения однородного и неоднородного функциональных уравнений. Эти решения зависят от коэффициентов исходного уравнения, начальной функции, порождающей цикл, и содержат произвольно выбранную функцию. Для устранения возникающей неоднозначности можно перейти к модели с невырожденной матрицей, изменив систему весовых коэффициентов модельного уравнения, или привлечь дополнительные начальные условия.

Ключевые слова: линейное функциональное уравнение, уравнение со сдвигом, итерация, цикл, сопутствующая система, ранг, однородное и неоднородное функциональное уравнение.

Поступила в редакцию 16.09.2019
После доработки 05.11.2019
Принята к публикации 06.11.2019

Введение

Методы математического моделирования применяются при изучении различных вопросов радиационной безопасности [1-3]. В одной из моделей используется линейное функциональное уравнение со сдвигом, разработанное Карлеманом [4]. Такая модель описания впоследствии развивалась [5, 6] и применялась во многих задачах, в том числе, при решении уравнений гиперболического типа [7], к которым относятся уравнения переноса заряженных частиц и ионизирующего излучения в различных материальных средах. В настоящей работе рассматриваются вопросы однозначности решений линейного функционального уравнения с циклическими итерациями аргумента (уравнения со сдвигом) [8]:

$$a_0(x)u(x)+a_1(x)u(f(x))+a_2(x)u(f(f(x)))+...+a_{n-1}(x)u(\underbrace{f(f(...f}_{n-1}(x)...)))=b(x), \ (1),$$

где $a_0(x), a_1(x), ..., a_{n-1}(x), b(x), f(x)$ − заданные функции, определённые на множестве $X \subset R$, причём $Y \subset X$, где $Y = f(X)$ − множество значений $f(x)$; $u(x)$ − искомая функция. Предполагается, что функция $f(x)$ имеет обратную, а её последовательные итерации $f(x), f(f(x)), f(f(f(x))),...$ образуют цикл длины n (условие Карлемана), т.е.

$$\underbrace{f(f(...f}_{k}(x)...)) \neq x \text{ при } 1 \leq k < n \text{ и } \underbrace{f(f(...f}_{n}(x)...)) = x. \tag{2}$$

Введём обозначения:

$f_0(x) = x,\ f_1(x) = f(x),\ f_k(x) = \underbrace{f(f(...f}_{k}(x)...)),\ k = 1,2,...,n-1,$ следовательно, $f_n(x) = x = f_0(x)$ − условие цикличности. Обозначим также $a_{k;i}(x) = a_i(f_k(x)), u_k(x) = u(f_k(x)), b_k(x) = b(f_k(x)),\ i,k = 1,2,...,n-1.$

Тогда уравнение (1) принимает следующий вид:

$$a_{0;0}(x)u_0(x) + a_{0;1}(x)u_1(x) + a_{0;2}(x)u_2(x) + ... + a_{0;n-1}(x)u_{n-1}(x) = b_0(x). \tag{3}$$

Подставляя последовательно в уравнение (3) вместо x итерации $f_k(x)$ $(k = 1,2,...,n-1),$ вместе с уравнением (3) получим сопутствующую ему систему равенств:

$$\begin{cases} a_{0;0}(x)u_0(x) + a_{0;1}(x)u_1(x) + a_{0;2}(x)u_2(x) + ... + a_{0;n-1}(x)u_{n-1}(x) = b_0(x) \\ a_{1;n-1}(x)u_0(x) + a_{1;0}(x)u_1(x) + a_{1;1}(x)u_2(x) + ... + a_{1;n-2}(x)u_{n-1}(x) = b_1(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n-2;2}(x)u_0(x) + a_{n-2;3}(x)u_1(x) + a_{n-2;4}(x)u_2(x) + ... + a_{n-2;1}(x)u_{n-1}(x) = b_{n-2}(x) \\ a_{n-1;1}(x)u_0(x) + a_{n-1;2}(x)u_1(x) + a_{n-1;3}(x)u_2(x) + ... + a_{n-1;0}(x)u_{n-1}(x) = b_{n-1}(x). \end{cases} \tag{4}$$

Данная система уравнений является линейной относительно величин $u_0(x), u_1(x), ..., u_{n-1}(x)$. Пусть $\Delta(x)$ − главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{0;0} & a_{0;1} & \dots & a_{0;n-2} & a_{0;n-1} \\ a_{1;n-1} & a_{1;0} & \dots & a_{1;n-3} & a_{1;n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-2;2} & a_{n-2;3} & \dots & a_{n-2;0} & a_{n-2;1} \\ a_{n-1;1} & a_{n-1;2} & \dots & a_{n-1;n-1} & a_{n-1;0} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Частного вида уравнения для случая $\Delta \neq 0$ периодически встречались в печати (см. [9, с.82], [10, с.12], [11], [12, с.413], [13, с.470]). Однако условие $\Delta \neq 0$ не является необходимым для разрешимости исходного уравнения и, как отмечено [8, с. 58], требуются дополнительные исследования. В настоящей работе для $\Delta \neq 0$ показана непротиворечивость формул, составляющих решение системы (4). Исследование вопросов однозначности решений при условии $\Delta = 0$ полностью выполнено для циклов с $n = 2$.

Линейное уравнение для случая $\Delta \neq 0$

При условии $\Delta \neq 0$ решение системы, и притом единственное, находится по формулам Крамера [14, 15]:

$$u_k(x) = \frac{\Delta_k(x)}{\Delta(x)}, \quad k = 0,1,...,n-1, \tag{6}$$

где $\Delta_k(x)$ − определитель, полученный из (5) заменой k + 1-го столбца на столбец свободных членов. Решение уравнения (1) следует из (6) при k = 0: $u(x) = u_0(x) = \Delta_0(x)/\Delta(x)$, но т.к. функции $u_k(x)$ получаются последовательными итерациями: $u_{k+1}(x) = u_k(f(x))$, то формулы (6) в указанном смысле не должны противоречить друг другу.

Лемма 1

Пусть $\Delta \neq 0$, тогда решения (6) системы (4) корректны, т.е. удовлетворяют условиям

$$\frac{\Delta_{k+1}(x)}{\Delta(x)} = \frac{\Delta_k(f(x))}{\Delta(f(x))}, \quad k = 0,1,...,n-1,$$

Доказательство.

Подставим в (5) $f(x)$ вместо x:

$$\Delta(f(x)) = \begin{vmatrix} a_{1;0} & a_{1;1} & \dots & a_{1;n-2} & a_{1;n-1} \\ a_{2;n-1} & a_{2;0} & \dots & a_{2;n-3} & a_{2;n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1;2} & a_{n-1;3} & \dots & a_{n-1;0} & a_{n-1;1} \\ a_{0;1} & a_{0;2} & \dots & a_{0;n-1} & a_{0;0} \end{vmatrix}.$$

Если последнюю строку сделать первой и последний столбец также сделать первым, то полученный в результате перестановок определитель совпадёт с определителем (5). Таким образом, $\Delta(f(x)) = (-1)^n \cdot (-1)^n \Delta(x) = \Delta(x)$. Точно так же доказывается, что если в определителе $\Delta_k(f(x))$ последнюю строку сделать первой, а последний столбец также сделать первым, то полученный определитель совпадёт с определителем $\Delta_{k+1}(x)$, значит $\Delta_k(f(x)) = (-1)^n \cdot (-1)^n \Delta_{k+1}(x) = \Delta_{k+1}(x)$, $k = 1,2,...,n-2$ (при $k = n - 1$ различие лишь в том, что $\Delta_{n-1}(f(x)) = (-1)^n \cdot (-1)^n \Delta_0(x) = \Delta_0(x)$). Лемма доказана.

Таким образом, если $\Delta \neq 0$, то уравнение (1) имеет единственное решение, определяемое формулой (7):

$$u(x) = \frac{\Delta_0(x)}{\Delta(x)}. \tag{7}$$

Пример 1

Решить уравнение:

$$u(x) + 2u(f(x)) + 3u(f(f(x))) + ... + nu(\underbrace{f(f(...f(x)...))}_{n-1}) = b(x), \tag{8}$$

где $f(x)$ − произвольная заданная функция, порождающая цикл (2) длины n. В обозначениях (1) $a_k(x) = k + 1$, $k = 0,1, ..., n - 1$; главный определитель Δ системы (4) является циркулянтом [16] и отличен от нуля [17]:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \dots. & n-1 & n \\ n & 1 & \dots. & n-2 & n-1 \\ \dots & \dots & \dots. & \dots & \dots \\ 3 & 4 & \dots. & 1 & 2 \\ 2 & 3 & \dots. & n & 1 \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{n-1} n^{n-1}(n+1)}{2}.$$

Для нахождения решения (7) определитель

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} b_0 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ b_1 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ b_2 & n & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-2} & 4 & 5 & \dots & 1 & 2 \\ b_{n-1} & 3 & 4 & \dots & n & 1 \end{vmatrix}$$

разложим по первому столбцу:

$$\Delta_0 = b_0 A_{00} + b_1 A_{10} + \ldots + b_{n-1} A_{n-1;0},$$

где $A_{k;0}$ – алгебраическое дополнение элемента b_k, $k = 0,1,\ldots,n-1$. Непосредственный подсчёт даёт:

$$A_{00} = \frac{(-1)^n n^{n-3}(n^2+n-2)}{2}, \qquad A_{10} = \frac{(-1)^n n^{n-3}(n^2+n+2)}{2}.$$

Вычисления остальных алгебраических дополнений проводятся по единой схеме и приводят к одному и тому же результату:

$$A_{k0} = (-1)^{n-1} n^{n-3}, \quad k = 2, 3, \ldots, n-1.$$

В итоге получаем единственное решение уравнения (8):

$$u(x) = \frac{2}{n^2(n+1)}\left(-\frac{n^2+n-2}{2} b_0(x) + \frac{n^2+n+2}{2} b_1(x) + b_2(x) + \ldots + b_{n-1}(x)\right),$$

где $b_0(x) = b(x), b_k(x) = b(\underbrace{f(\ldots f}_{k}(x)\ldots)),\ k = 1, 2, \ldots, n-1$. Отметим также, что уравнение (8) с системой весовых коэффициентов $\{1, 2, \ldots, n\}$ равносильно уравнению с системой коэффициентов $\{1, 1/2, \ldots, 1/n\}$ (для установления равносильности достаточно обе части поделить на n и заменить последнее слагаемое $u(f(f(\ldots f(x)\ldots))) = v(x)$).

Линейное уравнение для случая $\Delta = 0$, $n = 2$

Проанализируем особенности нахождения решения задачи с $\Delta = 0$ при $n = 2$.

Уравнение (1) при $n = 2$ имеет следующий вид:

$$a_0(x)u(x) + a_1(x)u(f(x)) = b(x), \tag{9}$$

где функция $f(x)$ инволютивна, т.е. порождает цикл длины 2: $f(f(x)) = x$, а каждая из функций $a_0(x), a_1(x)$ тождественно отлична от нуля (иначе уравнение (9) становится тривиальным). Для сопутствующей уравнению системы

$$\begin{cases} a_0(x)u(x) + a_1(x)u(f(x)) = b(x) \\ a_1(f(x))u(x) + a_0(f(x))u(x) = b(f(x)) \end{cases} \tag{10}$$

главный определитель равен 0, значит, его строки пропорциональны с некоторым коэффициентом $k(x)$: $a_0(x) = k(x)a_1(f(x)),\ a_1(x) = k(x)a_0(f(x))$. Если $b(x) \neq k(x)b(f(x))$, тогда ранг расширенной матрицы $\begin{pmatrix} a_0(x) & a_1(x) & b(x) \\ a_1(f(x)) & a_0(f(x)) & b(f(x)) \end{pmatrix}$ равен двум и система (10) несовместна, следовательно, уравнение (9) не имеет решений. Пусть теперь $b(x) = k(x)b(f(x))$, т.е.:

$$\frac{a_0(x)}{a_1(f(x))} = \frac{a_1(x)}{a_0(f(x))} = \frac{b(x)}{b(f(x))} = k(x), \tag{11}$$

Ранг равен 1 и от системы (10) остаётся только уравнение (9). Метод решения, используемый в п.1, не применим.
Введём функционал:

$$L[y(x)] = a_0(x)y(x) + a_1(x)y(f(x)), \tag{12}$$

который, очевидно, является линейным:

$$L[\alpha u(x) + \beta v(x)] = \alpha L[u(x)] + \beta L[v(x)] \quad (\forall \alpha, \beta \in R).$$

Запишем с помощью (12) неоднородное уравнение (9):

$$L[u(x)] = b(x), \quad x \in X, \tag{13}$$

и соответствующее ему однородное уравнение:

$$L[u(x)] = 0, \quad x \in X. \tag{14}$$

Определение

Множество функций Ω_0 называется общим решением уравнения (14) на X, если:

1) любая функция $y(x)$, $x \in X$, принадлежащая Ω_0, является решением уравнения (14);

2) любое решение $y(x)$, $x \in X$ уравнения (14) принадлежит Ω_0.

Аналогично определяется общее решение неоднородного уравнения (13).

Лемма 2

Общее решение однородного уравнения (14) определяется формулой (15):

$$u_0(x) = a_0(f(x))w(x) - a_1(x)w(f(x)), \tag{15}$$

или равносильной ей:

$$u_0(x) = \frac{1}{2}v(x) - \frac{a_1(x)}{2a_0(x)}v(f(x)), \tag{16}$$

где $w(x)$, $v(x)$ − произвольные на X функции.

Доказательство.

Будем искать решение уравнения (14) в виде:

$$u_0(x) = A(x)w(x) + B(x)w(f(x)),$$

где $w(x)$ − произвольная функция, а функции $A(x)$ и $B(x)$ подлежат определению. Подставим $u_0(x)$ в (14) и перегруппируем слагаемые:

$$(a_0(x)A(x) + a_1(x)B(f(x)))w(x) + (a_0(x)B(x) + a_1(x)A(f(x)))w(f(x)) = 0$$

Т.к. функция $w(x)$ произвольна, то отсюда следуют условия:

$$\begin{cases} a_0(x)A(x) + a_1(x)B(f(x)) = 0 \\ a_0(x)B(x) + a_1(x)A(f(x)) = 0, \end{cases}$$

которые можно записать в следующем виде:

$$\frac{A(x)}{B(f(x))} = \frac{B(x)}{A(f(x))} = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)},$$

Величины $A(x)$ и $B(x)$ определяются неоднозначно. Если взять $A(f(x)) = a_0(x)$, тогда $A(x) = a_0(f(x)), B(x) = -a_1(x)$ и получаем формулу (15). Если же взять $A(f(x)) = 1$, тогда $A(x) = 1, B(x) = -a_1(x)/a_0(x)$, что соответствует равенству (16), и т.п. Но это будут равносильные представления одной и той же формулы. Так, равносильность (15) и (16) становится очевидной, если связать $v(x)$ и $w(x)$ соотношением: $v(x) = 2a_0(f(x))w(x).$ Тем самым, для любых $v(x)$ и $w(x)$ (15) и (16) являются решениями уравнения (14).

Осталось показать, что любое решение уравнения (14) содержится, например, в (16). Пусть $g(x)$ − произвольная функция, удовлетворяющая (14), тогда $-a_1(x)g(f(x))/a_0(x) = g(x)$. Теперь, чтобы убедиться, что $g(x)$ содержится в (16), достаточно в качестве $v(x)$ взять $g(x)$. Лемма доказана.

Лемма 3

Пусть $a_0(x) \neq 0$, тогда общее решение неоднородного уравнения (13) находится по формуле

$$u(x) = \frac{b(x)}{2a_0(x)} + \frac{1}{2}v(x) - \frac{a_1(x)}{2a_0(x)}v(f(x)), \tag{17}$$

где $v(x)$ − произвольная на X функция.

Доказательство.

С помощью (11) легко убедиться, что функция $u_н(x) = b(x)/(2a_0(x))$ является частным решением неоднородного уравнения (13). Добавляя к $u_н(x)$ общее решение (16) однородного уравнения, получаем: $u(x) = u_н(x) + u_0(x)$ − решение уравнения (13) для любой функции $v(x)$, входящей в $u_0(x)$, т.к. в силу линейности функционала (12):

$$L[u_н(x)+u_0(x)] = L[u_н(x)] + L[u_0(x)] = b(x).$$

Осталось доказать, что (17) содержит любое решение уравнения (13). Пусть $g(x)$ − произвольная функция, удовлетворяющая (13):

$$b(x) = a_0(x)g(x) + a_1(x)g(f(x)). \tag{18}$$

Рассматривая теперь уравнение (13) с правой частью $b(x)$, определяемой равенством (18), и подставляя (18) в (17), получим:

$$u(x) = \frac{g(x)}{2} + \frac{a_1(x)g(f(x))}{2a_0(x)} + \frac{1}{2}v(x) - \frac{a_1(x)}{2a_0(x)}v(f(x)).$$

Очевидно, что решение $g(x)$ содержится в $u(x)$, если в качестве $v(x)$ взять $g(x)$. Лемма доказана.

Пример 2

Найти все функции, удовлетворяющие уравнению:

$$\frac{x}{x-1}u(x) + xu\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}, \qquad X = R\setminus\{1\}. \tag{19}$$

Здесь $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ и $f(f(x)) = x$ − цикл длины 2; $b(x) = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}, a_0(x) = \dfrac{x}{x-1}, a_1(x) = x$. Для коэффициентов уравнения выполняются условия (11) ($k(x) = 1$), но $\Delta = 0$ и формула (7) не применима. Множество всех решений уравнения (19) находим по формуле (17):

$$u(x) = \frac{x^2-2x+2}{2x} + \frac{1}{2}v(x) - \frac{x-1}{2}v\left(\frac{x}{x-1}\right), \quad (x \neq 0,\ x \neq 1),$$

где $v(x)$ − произвольная функция.

Таким образом, в рамках примененной модели рассмотрен вопрос существования и единственности получаемых решений. Показано, что решения совместной сопутствуюшей системы в случае вырожденной матрицы уже при $n = 2$ содержат неоднозначность − произвольно выбранную функцию. Для устранения возникающей неоднозначности можно перейти к задаче с невырожденной матрицей, изменив систему весовых коэффициентов модельного уравнения, или привлечь дополнительные начальные условия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кучин, Н. Л.* Математическое моделирование радиационного воздействия атомных объектов морской техники на окружающую среду и человека : диссертация доктора физико-математических наук / Н. Л. Кучин. − Санкт-Петербург, 2002. – 297 с.
2. *Чирская, Н. П.* Математическое моделирование свойств неоднородных структур для систем радиационной защиты / Н. П. Чирская, Е. Н. Воронина, В. Н. Милеев, Л. С. Новиков, В. В. Синолиц // Труды XXI Международной конференции «Радиационная физика твердого тела», т. 2. – Москва : ГНУ НИИ ПМТ, 2011. − С. 436-443.

3. *Крюк, Ю. Е.* Математические методы моделирования в оптимизации радиационной защиты / Ю. Е. Крюк, И. Е. Кунец // Вестник НТУ ХПИ. Серия: Информатика и моделирование. – Харьков : НТУ ХПИ. – 2011. – № 36. – С. 95-100.
4. *Carleman, T.* Sur la theorie des equations integrates et ses applications, Verhandl. Internat. Math. Kongr. Zurich, 1 (1932), P.138 – 151.
5. *Литвинчук, Г. С.* Краевые задачи и сингулярные уравнения со сдвигом / Г. С. Литвинчук. − Москва : Наука, 1977. – 448 с.
6. *Карапетянц, Н. К.* Уравнения с инволютивными операторами и их приложения / Н. К. Карапетянц, С. Г. Самко. – Ростов-на-Дону : Издательство Ростовского университета, 1988. – 187 с.
7. *Василевский, Н. Л.* Об одном классе сингулярных интегральных уравнений с инволюцией и его применениях в теории краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. II / Н. Л. Василевский, А. А. Карелин, П. В. Керекеша, Г. С. Литвинчук // Дифференциальные уравнения. – 1977. 13:11. – С. 2051-2062.
8. *Антоневич, А. Б.* Линейные функциональные уравнения: операторный подход / А. Б. Антоневич. – Минск : Издательство «Университетское», 1988. − 232 с.
9. Московский государственный университет. Справочник 2000. − Москва : Издательство Московского университета, 2000. − 240 с.
10. *Агаханов, Н. Х.* Всероссийские олимпиады школьников по математике 1993-2006 / Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников, О. К. Подлипский, Д. А. Терешин. − Москва : МЦНМО, 2007. − 472 с.
11. *Бродский, Я. С.* Функциональные уравнения / Я. С. Бродский, А. К. Слипенко. – Киев : Вища школа, 1983. − 96 с.
12. *Полянин, А. Д.* Справочник по интегральным уравнениям: Точные решения / А. Д. Полянин, А. В. Манжиров. − Москва : Издательство «Факториал», 1998. − 432 с.
13. *Прасолов, В. В.* Задачи по алгебре, арифметике и анализу / Прасолов В. В. – Москва : МЦНМО, 2007. − 608 с.
14. *Мальцев, А. И.* Основы линейной алгебры /А. И. Мальцев. − Москва : Наука, 2005. − 470 с.
15. *Курош, А. Г.* Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. − Санкт-Петербург : Лань, 2019. − 432 с.
16. *Фаддеев, Д. К.* Лекции по алгебре / Д. К. Фаддеев. − Санкт-Петербург : Лань, 2002. − 416 с.
17. *Фаддеев, Д. К.* Сборник задач по высшей алгебре / Д. К. Фаддеев, И. С. Соминский. – Москва : Наука, 1977. − 288 с.

REFERENCES

[1] Kuchin N.L. Matematicheskoe modelirovanie radiatzionnogo vozdeistvia atomnikh objectov morskoi tecniki na okrudjaiushuiu sredu [Mathematical Modeling of the Radiation Effect of Atomic Objects of Marine Technology on the Environment and Humans]. Dissertaciya doktora fiziko-matematicheskix nauk [Dissertation of Doctor of Physical and Mathematical Sciences]. Sankt-Peterburg [Saint-Petersburg]. 2002. 297 p. (in Russian).
[2] Chirskaya N.P., Voronina E.N., Mileev V.N., Novikov L.S., Sinolits V.V. Matematicheskoe modelirovanie svoistv neodnorodnikh struktur dlia system radiatzionnoi zashiti [Mathematical Modeling of the Properties of Heterogeneous Structures for Radiation Protection Systems]. Moskva. Trudi XXI Mezdunarodnoi konferentsii «Radiatsionnaia phyzika tverdogo tela» [Moscow. Proceedings of the XXI International Conference «Radiation Solid State Physics»]. 2011. v. 2. P. 436-443 (in Russian).
[3] Kriuk J.E., Kunets I.E. Matematicheskie metodi modelirovania v optimizatsii radiatzionnoi zashiti [Mathematical Modeling Methods in Optimization of Radiation Protection]. Kharkov. Vestnik NTU KhPI. Seria: Informatika i modelirovanie [Bulletin of the National Technical University Kharkov Polytechnic Institute. Series: Computer Science and Modeling]. 2011. № 36. P. 95-100 (in Russian).
[4] Carleman T. Sur la theorie des equations integrates et ses applications, Verhandl. Internat. Math. Kongr. Zurich. 1 (1932). P.138-151 (in French).
[5] Litvinchuk G.S. Kraevie zadachi i singuliarnie uravnenia so sdvigom [Boundary Value Problems And Singular Equations with Shift]. Moscow. Pub. Nauka [Publishing House Science]. 1977. 448 p. (in Russian).
[6] Karapetiants N.K., Samko S.G. Uravnenia s involiutivnimi operatorami i ikh prilodjenia [Equations with Involutive Operators and their Applications]. Postov-na-Donu. Izdatelstvo Rostovskogo universiteta [Rostov on Don. Rostov University Publishing House]. 1988. 187 p. (in Russian).
[7] Vasilevsky N.L., Karelin A.A., Kereksha P.V., Litvinchuk G.S. Ob odnom klasse singuliarnikh uravneni’ i ego primeneniakh v teorii kraevikh zadach dlia differentsialnikh uravneni’ v chastnikh proizvodnikh. II [A Class of Singular Integral Equations with Involution and its Applications in the

Theory of Boundary Value Problems for Partial Differential Equations. II]. Differencial`ny`e uravneniya [Differential equation]. 1977, 13:11. P. 2051-2062 (in Russian).
[8] Antonevich A.B. Lineinie functional'nie uravnenia: operatorni podhod [Linear Functional Equations: Operator Approach]. Minsk. Izdatelstvo Universitetskoe [Publishing House University]. 1988. 232 p. (in Russian).
[9] Moskovsky Gosudarstvenny Universitet. Spravochnik 2000 [Moscow State University. Handbook 2000]. Moskva. Izdatelstvo Moskovskogo universiteta [Moscow. Moscow University Press]. 2000. 240 p. (in Russian).
[10] Agakhanov N.H., Bogdanov I.I., Kodjevnicov P.A., Podlipsky O.K., Tereshin D.A. Vserossi'skie olympiadi shkolnikov po matematike 1993-2006 [All-Russian Mathematics Olympiads 1993-2006]. Moscow. MCCME. 2007. 472 p. (in Russian).
[11] Brodsky J.S., Slipenko A.K. Funktsional'nie uravnenia [Functional Equations]. Kiev. Pub. Visha shkola [High school]. 1983. 96 p. (in Russian).
[12] Poliayin A.D., Manzhirov A. V. Spravochnik po integral'nim uravneniam: Tochnie reshenia [Handbook of Integral Equations: Exact Solutions]. Moscow. Pub. Factorial. 1998. 432 p. (in Russian).
[13] Prasolov V.V. Zadachi po algebre, arifmetike i analizu [Problems in Algebra, Arithmetic and Analysis]. Moscow. MCCME. 2007. 608 p. (in Russian).
[14] Mal'tsev A.I. Osnovi lineinoi algebra [The Basics of Linear Algebra]. Moscow. Pub. Nauka [Publishing House Science]. 2005. 470 p. (in Russian).
[15] Kurosh A. G. Kurs vishei algebri [Course in Higher Algebra]. Sankt-Peterburg [Saint-Petersburg]. Pub. Lan' [Publishing House «Doe»]. 2019. 432 p. (in Russian).
[16] Faddeev D.K. Lektsii po algebre [Lectures on Algebra]. Sankt-Peterburg [Saint-Petersburg]. Pub. Lan' [Publishing House "Doe"]. 2002. 416 p. (in Russian).
[17] Faddeev D.K., Sominsky I.S. Sbornik zadach po vishei algebre [Collection of Problems in Higher Algebra]. Moscow. Pub. Nauka [Publishing House Science]. 1977. 288 p. (in Russian).

Unambiguity of Decisions When Using Linear Functional Equation in the Radiation Protection Model

V.P. Cherniavsky

Sarov Physical Technical Institute the branch of National Research Nuclear University "MEPhI", Dukhov St., 6, Sarov, Nizhny Novgorod region, Russia 607186
ORCID iD: 0000-0002-1628-2271
e-mail: mattutor@mail.ru

Abstract – The paper considers a functional linear equation with a shift in the radiation protection model for the transport of charged particles and ionizing radiation. The aim of the work is to study the questions of the existence and uniqueness of solutions for various cases that arise when the initial parameters of the model change. The analysis of the system accompanying the functional equation is carried out by linear algebra methods. For the case of the inequality to zero of the main determinant of the accompanying system, the correctness of the obtained solutions is shown; the functional equation has a unique solution. If the determinant vanishes, the problem is completely solved for cycles of length 2. The functional equation has no solutions if the determinant is zero and the rank of the extended matrix is 2. For the case of a joint system with a degenerate matrix, analytical formulas for the general solution of a homogeneous and inhomogeneous functional equation are obtained . These solutions depend on the coefficients of the initial equation, the initial function generating the cycle, and contain an arbitrarily chosen function. To eliminate the ambiguity that arises, one can go to a model with a non-degenerate matrix by changing the system of weight coefficients of the model equation, or use additional initial conditions.

Keywords: linear functional equation, shift equation, iteration, cycle, associated system, rank, homogeneous and inhomogeneous functional equation.