

ИЗЫСКАНИЕ, ПРОЕКТИРОВАНИЕ,  
СТРОИТЕЛЬСТВО И МОНТАЖ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ

УДК 539.3

НОВЫЕ ПОДХОДЫ К РАСЧЕТУ НА ИЗГИБ КРУГЛЫХ И  
КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИН, А ТАКЖЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИХ НИЗШИХ  
СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ

© 2021 А.С. Кравчук\*, С.А. Томилин\*\*, А.И. Кравчук\*\*\*, С.Ф. Годунов\*\*,  
А.Ф. Смалюк\*\*\*

\*Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

\*\*Волгодонский инженерно-технический институт – филиал Национального исследовательского  
ядерного университета «МИФИ», Волгодонск, Россия

\*\*\*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

Предполагается, что поперечные перемещения пластин постоянной толщины являются малыми. При этом пластины изгибаются приложенными по краю моментами с постоянной интенсивностью. Впервые разработана теория чистого изгиба круглых и кольцевых пластин. Под чистым изгибом понимается напряженно-деформированное состояние, при котором полностью отсутствуют сдвиги в пластинах. В рамках принятых гипотез определены нормальные радиальные деформации пластин. Исходя из уравнения неразрывности в осесимметричном случае установлено, что нормальные радиальные и окружные деформации совпадают. Используя закон Гука, определены нормальные напряжения, действующие в пластинах. Исходя из уравнений равновесия, вычислены моменты, необходимые для изгиба пластин до заданной кривизны. Получено дифференциальное уравнение для определения малых поперечных перемещений пластин под действием моментов постоянной интенсивности, приложенных к краю пластины. Получено решение этого уравнения в элементарном виде для случая шарнирного закрепления по периметру. Для перехода к решению задач изгиба пластин поперечной нормальной нагрузкой предложен метод определения эквивалентных моментов по действующей осесимметричной нагрузке, как для круглых, так и для кольцевых пластин. Для удовлетворения условий равновесия для рассматриваемых пластин при действии поперечной нагрузки предполагается, что величина вертикальной реакции на опорах по периметру равномерно распределена и равна интегральной величине нормальной нагрузки, деленной на длину периметра. В качестве примера решены задачи изгиба пластин под собственным весом при шарнирном опирании. В рамках предлагаемой теории продемонстрированы решения задач изгиба круглых и кольцевых пластин, расположенных на основании Винклера. Впервые предложена методика определения нижней собственной частоты как круглых, так и кольцевых пластин в рамках предлагаемой теории чистого изгиба. Предложена также методика учета влияния основания Винклера под пластинами на низшую собственную частоту.

*Ключевые слова:* чистый изгиб, круглая пластина, кольцеобразная пластина, вычисление эквивалентного момента, основание Винклера, низшая собственная частота.

Поступила в редакцию 24.12.2020

После доработки 03.03.2021

Принята к печати 09.03.2021

### Введение

Повышение требований к безопасности объектов атомной энергетики стимулирует разработку новых теорий и методов решений задач прочности и жесткости конструктивных элементов, технологического оборудования и конструкций, как основного, так и вспомогательных зданий и сооружений атомных станций, в том числе при воздействии природных явлений [1-3]. Многие современные

конструкционные решения состоят из элементов, которые можно классифицировать как пластинки. Данные пластинки могут быть постоянной или переменной толщины [4] различной сложной геометрической формы, при этом на них могут оказывать влияния не только силовые, но и температурные воздействия. Кроме того, пластины могут состоять из структурно неоднородных материалов [5].

Как известно, классическая теория пластин строится на основе гипотез Кирхгофа, одна из которых (геометрическая) предполагает отсутствие поперечных сдвигов и поперечного обжатия. Но тогда, в соответствии с соотношениями закона Гука, следовало бы принять, что перерезывающие силы равны нулю, что привело бы к невозможности уравновесить нормальную поверхностную нагрузку. В этом и заключается основное противоречие кирхгофской теории пластин [6].

Попытка смягчить предположение об отсутствии сдвигов [6] приводит к тому, что в соответствии со свойством парности касательных напряжений [7] на поверхности пластины действует не только поперечная нагрузка, но и специфическое распределение касательных напряжений, что также противоречит исходной постановке задачи об отсутствии на поверхности пластины касательных нагрузок.

В данной работе впервые построена непротиворечивая теория чистого изгиба круглых пластин поперечной осесимметричной нагрузкой. Идея исследования заключается в том, чтобы действующую осесимметричную нагрузку заменить эквивалентным моментом, приложенным к краю круглой пластины. Сами уравнения изгиба получаются аналогично обобщению Тимошенко С.П. [8, 9] уравнения чистого изгиба бруса на чистый изгиб прямоугольной пластины.

#### **Основные гипотезы, используемые в простейшей модели изгиба круглой пластины постоянной толщины**

При построении теории чистого изгиба круглой пластины радиусом  $R$  постоянной толщины (Рисунок 1) ее можно разделить на элементарные слои толщиной  $\lambda$ . Будем предполагать, что продольные слои в пластине не взаимодействуют в поперечном направлении, а также в пластине существует нейтральный слой – слой, радиальные размеры которого не изменяется при изгибе. Используется гипотеза о полном отсутствии сдвигов ( $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ).

Пластина изгибается приложенным по краю моментом  $M_r$  с постоянной интенсивностью  $\frac{M_r}{2\pi R}$  (рис. 1). Пусть круглая пластина имеет постоянную толщину  $h$ .

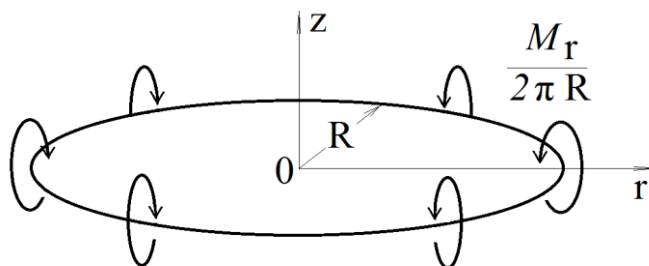


Рисунок 1 – Чистый изгиб круглой пластины постоянной толщины моментом постоянной интенсивности, приложенным к ее краю [Pure bending of a circular plate of constant thickness by a moment of constant intensity applied to its edge]

#### **Определение напряжений в круглой пластине в условиях чистого изгиба**

Следуя монографии Тимошенко С.П. [8], исходя из очевидных рассуждений о геометрическом подобии продольных размеров элементарных слоев размерам нейтрального слоя, можно установить, что нормальные радиальные  $\varepsilon_r(z)$  деформации

элементарного слоя относительно геометрического положения нейтрального слоя распределены следующим образом [8], формула (1):

$$\varepsilon_r(z) = \frac{z - \delta}{\rho_r}, \quad (1)$$

где  $\delta$  – координата нейтрального слоя относительно геометрической середины пластины;

$\rho_r$  – радиус кривизны осесимметричного нейтрального слоя в плоскости  $r\theta z$ . Исходя из уравнения неразрывности деформаций в полярных координатах в осесимметричном случае [10], с учетом (1) можно утверждать, что окружные  $\varepsilon_\theta(z, t)$  будут иметь вид формулы (2):

$$\varepsilon_\theta(z) = \frac{z - \delta}{\rho_r}. \quad (2)$$

Для плоского напряженного состояния ( $\sigma_z = 0$ ) можно получить следующие уравнения (3) для действующих напряжений  $\sigma_r(z)$ ,  $\sigma_\theta(z)$  и нормальных деформаций плоскости пластины  $\varepsilon_r(z)$ ,  $\varepsilon_\theta(z)$  [11]:

$$\begin{aligned} \sigma_r(z) &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_r(z) + \nu \cdot \varepsilon_\theta(z)) = \frac{E}{1-\nu} \frac{z - \delta}{\rho_r}, \\ \sigma_\theta(z) &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta(z) + \nu \cdot \varepsilon_r(z)) = \frac{E}{1-\nu} \frac{z - \delta}{\rho_r}. \end{aligned} \quad (3)$$

### Уравнения равновесия

Определение координаты нейтрального слоя относительно середины круглой пластины. Исходя из того, что касательные напряжения по предположению отсутствуют и при чистом изгибе круглой пластины  $\sigma_r(z) = \sigma_\theta(z)$  (см. систему (3)), то необходимо удовлетворить два уравнения равновесия (4):

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^R \sigma_r \, dy \, dz = 0, & \quad 2\pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_0^R (\sigma_r \cdot z) \, r \, dr \, dz = M_r. \end{aligned} \quad (4)$$

Подставляя первое уравнение (3) в систему (4), получаем уравнения равновесия, определяющие в общем случае положение нейтрального слоя  $\delta$  относительно середины толщины пластины (см. рис. 1), и величину радиуса кривизны  $\rho_r$ :

$$\int_{-h/2}^{h/2} (y - \delta) \, dy = 0, \quad (5)$$

$$\frac{E}{(1-\nu) \cdot \rho_r} \int_{-h/2}^{h/2} (z - \delta) \cdot z dz = \frac{1}{2\pi \cdot R} M_r.$$

Окончательно из (5) можно получить решение (6):

$$\delta = 0, \tag{6}$$

$$\frac{1}{\rho_r} = \frac{6 \cdot (1-\nu)}{E \cdot h^3} \cdot \frac{1}{\pi \cdot R} M_r.$$

### Определение перемещений круглой пластины при шарнирном закреплении по периметру

В осесимметричном случае в вершине круглой пластины кривизна определяется как  $\frac{1}{\rho_r} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} w(r) \Big|_{r=0}$ . Будем считать, что  $\frac{\partial^2}{\partial r^2} w(r)$  постоянна  $\forall r \in [0, R]$ , тогда можно получить уравнение:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} w(r) = \frac{6 \cdot (1-\nu)}{E \cdot h^3} \cdot \frac{1}{\pi \cdot R} M_r. \tag{6}$$

Несложно заметить, что, исходя из условий шарнирного закрепления при  $r = R$ , можно получить единственное решение уравнения (6) в виде:

$$w(r) = \frac{6 \cdot (1-\nu)}{E \cdot h^3} \cdot \frac{1}{\pi \cdot R} M_r (r^2 - R^2). \tag{7}$$

Пусть поперек пластины, закрепленной в углах на ее верхней поверхности, действует внешняя осесимметричная распределенная нагрузка с интенсивностью  $q(r) < 0$ . Будем предполагать, что нагрузка распределена по участку круга  $S$  радиуса  $a$  поверхности пластины, т.е.  $q(r) \neq 0$  при  $r \in [0, a]$  и  $q(r) = 0$  при  $r \in [a, R]$  (рис. 2). Соответственно предполагается, что интенсивность вертикальной реакции при опоре

по периметру равна  $-\frac{1}{R} \int_0^R q(r) \cdot r dr$ .

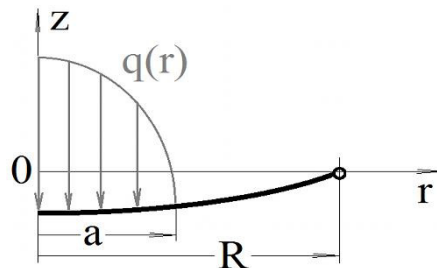


Рисунок 2 – Действие распределенной поперечной нагрузки  $q(r)$  на поверхность пластины

[The action of a distributed transverse load  $q(r)$  on the surface of the plate]

Тогда для расчета прогибов по формуле (7) можно использовать уравнения, определяющие момент, эквивалентный приложенной нагрузке  $q(r)$ :

$$M_r = -2\pi \int_0^R q(r) \cdot r^2 dr. \quad (8)$$

Пример расчета прогибов упругой пластины под собственным весом. В данном случае  $q(r) = -g \cdot \rho \cdot h$  (главный вектор нагрузки направлен противоположно оси  $Oz$ ). Подставляя последнее выражение в (8) и интегрируя, получаем эквивалентный момент в виде:

$$M_r = 2\pi \cdot g \cdot \rho \cdot h \cdot \frac{R^3}{3}.$$

Таким образом, прогибы круглой пластины под действие собственного веса будут определяться выражением:

$$w(r) = \frac{4 \cdot (1-\nu)}{R \cdot E \cdot h^2} \cdot g \cdot \rho \cdot R^3 \cdot (r^2 - R^2). \quad (9)$$

#### **Чистый изгиб круглой пластины на упругом основании Винклера**

Как уже установлено ранее решение задачи о чистом изгибе определяется формулой (7). Рассчитаем в этом случае возникающий момент сопротивления от основания Винклера по формуле (8). Учитывая, что нагрузка сопротивления  $q_V(r)$  основания Винклера толщиной  $h_V$  и модулем упругости  $E_V$  определяется формулой  $q_V(r) = -E_V \frac{w(r)}{h_V}$  (главный вектор этой нагрузки сонаправлен с осью  $Oz$ ), а эквивалентный момент сопротивления основания прогибу пластины можно записать в виде:

$$\begin{aligned} M_V &= -2\pi \int_0^R q_V(r) \cdot r^2 dr = 2\pi \int_0^R E_V \frac{w(r)}{h_V} \cdot r^2 dr = \\ &= \frac{E_V}{h_V} \frac{12 \cdot (1-\nu)}{R \cdot E \cdot h^3} \cdot M_r \int_0^R (r^2 - R^2) \cdot r^2 dr = -\alpha \cdot M_r, \end{aligned}$$

$$\text{где } \alpha = \frac{24 E_V (1-\nu)}{15 h_V E \cdot h^3} \cdot R^4.$$

В этом случае суммарные перемещения от распределенной нагрузки  $q(r)$ , создающей эквивалентный момент  $M_r$ , и от нагрузки  $q_V(r)$ , создающей эквивалентный момент сопротивления основания  $M_V$ , равен решению с суммой двух моментов  $M_r$  и  $M_V$ :

$$w(r) = \frac{6 \cdot (1-\nu)}{\pi \cdot R \cdot E \cdot h^3} \cdot (M_r + M_V) \cdot (r^2 - R^2) = \frac{6 \cdot (1-\nu)}{\pi \cdot R \cdot E \cdot h^3} \cdot (1-\alpha) \cdot (r^2 - R^2) \cdot M_r.$$

Будем предполагать, что предлагаемая модель чистого изгиба круглой пластины на упругом основании верна, только когда  $\alpha < 1$ , т.е. когда выполнено:

$$\frac{h_V}{E_V} > \frac{24}{15} \frac{(1-\nu)}{E \cdot h^3} \cdot R^4. \quad (10)$$

Эти ограничения объясняются определенной неточностью применения методики сопротивления материалов при пересчете прогибов через эквивалентные моменты, а не непосредственного определения прогибов, исходя из действующей нагрузки.

Соответственно прогиб круглой пластины на упругом основании Винклера под действием собственного веса при принятых ограничениях на решаемую задачу определяется выражением:

$$w(r) = \frac{4 \cdot (1-\nu)}{R \cdot E \cdot h^2} \cdot g \cdot \rho \cdot R^3 \cdot (1-\alpha) \cdot (r^2 - R^2).$$

Интенсивность вертикальной реакции при оперании пластины по периметру равна  $-\frac{1-\alpha}{R} \int_0^R q(r) \cdot r dr$ .

#### **Оценка нижней собственной частоты колебаний чистого изгиба круглой пластины**

При собственных колебаниях  $q(r,t) = -w''(r,t) \cdot \rho \cdot h$ , где  $w''(r,t) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ , тогда из (7) и (8) следует, что:

$$w(r,t) = 12 \frac{(1-\nu)}{R \cdot E \cdot h^2} \cdot \rho \cdot \int_0^R w''(r,t) \cdot r^2 dr \cdot (r^2 - R^2). \quad (11)$$

Далее, предполагая по аналогии с (9), исходя из анализа размерностей, получаем:

$$w(r,t) = \frac{4 \cdot (1-\nu)}{R \cdot E \cdot h} \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot R^3 \cdot (r^2 - R^2) \cdot T(t), \quad (12)$$

где  $T(t)$  – некоторая функция времени, удовлетворяющая уравнению  $T(t) = -\frac{1}{\omega^2} \cdot T''(t)$ ;

$\omega$  – низшая собственная частота колебаний.

Подставляя (12) в (11), получаем:

$$\frac{T(t)}{T''(t)} = 12 \frac{(1-\nu)}{R \cdot E \cdot h^2} \cdot \rho \cdot \int_0^R (r^2 - R^2) \cdot r^2 dr.$$

Из последнего уравнения можно получить, что:

$$\omega^{-2} = -12 \frac{(1-\nu)}{R \cdot E \cdot h^2} \cdot \rho \cdot \int_0^R (r^2 - R^2) \cdot r^2 dr.$$

Таким образом, низшая собственная частота круглой пластины при колебаниях чистого изгиба определяется выражением:

$$\omega = \sqrt{\frac{5}{8} \frac{E}{(1-\nu)} \frac{h^2}{\rho \cdot R^4}}. \quad (13)$$

Соответственно при колебаниях пластины на Винклеровом основании при принятых ограничениях (10) уравнение для определения низшей частоты принимает вид:

$$w(r) = 12 \frac{(1-\nu)}{R \cdot E \cdot h^2} \cdot (1-\alpha) \cdot \rho \cdot \int_0^R w''(r,t) \cdot r^2 dr \cdot (r^2 - R^2).$$

С учетом ограничений (10) низшая собственная частота определяется выражением:

$$\omega = \sqrt{\frac{5}{8} \frac{E}{(1-\nu)(1-\alpha)} \frac{h^2}{\rho \cdot R^4}}. \quad (14)$$

### Результаты исследования изгиба концентрических колец

Рассмотрим кольцо внутренним радиусом  $R_1$  и внешним радиусом  $R_2$ . Пусть на внутренней и внешней границе действуют моменты  $M_1$  и  $M_2$  соответственно (рис. 3).

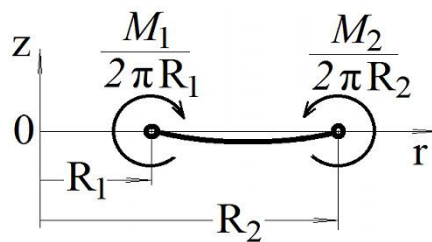


Рисунок 3 – Радиальное сечение концентрического кольца, изгибаемого моментами постоянной интенсивности, приложенными к границам [Radial section of a concentric ring bent by moments of constant intensity applied to the boundaries]

Несложно заметить, что уравнение (6) для малых поперечных прогибов остается верным и в случае рассматриваемой кольцевой пластины (см. рис. 3), с единственным уточнением:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} w(r) = \frac{6 \cdot (1-\nu)}{\pi \cdot E \cdot h^3 \cdot R_2} \cdot \left( M_2 - R_2 \frac{M_1}{R_1} \right),$$

если моменты вызывают прогиб кольца в одну сторону. Если действующие моменты вызывают прогиб кольца в разные стороны, то в этом случае радиальное сечение кольца следует разделить на два интервала, например, первая – параболической вогнутости, а вторая – параболической выпуклости. На обоих этих интервалах будет выполняться уравнение вида (6). Но в данном исследовании этот случай не рассматривается.

Соответственно решением последнего уравнения при описанных выше условиях на действующие моменты и при шарнирном опирании кольца по обеим границам будет выражение:

$$w(r) = \frac{6 \cdot (1 - \nu)}{\pi \cdot E \cdot h^3 \cdot R_2} \cdot \left( M_2 - R_2 \frac{M_1}{R_1} \right) \cdot (r - R_1)(r - R_2). \quad (15)$$

В качестве особенности предлагаемого решения для кольца можно выделить случай, когда момент  $M_1$  равен нулю, решение задачи изгиба кольца одним моментом  $M_2$ , приложенным к внешней границе, можно переписать в виде:

$$w(r) = \frac{6 \cdot (1 - \nu)}{\pi \cdot E \cdot h^3} \cdot \frac{M_2}{R_2} \cdot (r - R_1)(r - R_2).$$

При этом, возможно, приравнять  $R_1$  нулю и получить решение о шарнирном опирании круглой пластины в центре при изгибе ее моментом, приложенным на границе. Подобное решение невозможно получить с использованием стандартного подхода при расчете изгиба пластин [12].

В силу того что максимальный прогиб кольца при воздействии моментов  $M_1$  и  $M_2$  достигается на срединном радиусе кольца  $(R_1 + R_2)/2$ , вычисление эквивалентных моментов от действия поперечной осесимметричной распределенной нагрузки  $q(r)$  ( $r \in [R_1, R_2]$ ) будет определяться уравнениями:

$$M_1 = 2\pi \int_{R_1}^{(R_1 + R_2)/2} q(r) \cdot r^2 dr, \quad M_2 = -2\pi \int_{(R_1 + R_2)/2}^{R_2} q(r) \cdot r^2 dr.$$

Соответственно предполагается, что интенсивность вертикальной реакции при опоре по периметру равна  $-\frac{1}{R_1 + R_2} \int_{R_1}^{R_2} q(r) \cdot r dr$ .

При изгибе кольца под собственным весом, как и ранее, следует положить  $q(r) = -g \cdot \rho \cdot h$ , тогда

$$M_1 = -\frac{2}{3} \pi \cdot g \cdot \rho \cdot h \cdot \left( \left( \frac{R_1 + R_2}{2} \right)^3 - R_1^3 \right),$$

$$M_2 = \frac{2}{3} \pi \cdot g \cdot \rho \cdot h \cdot \left( R_2^3 - \left( \frac{R_1 + R_2}{2} \right)^3 \right),$$



и решение можно представить уравнением:

$$w(r) = \frac{4 \cdot (1-\nu)}{E \cdot h^2} \cdot g \cdot \rho \cdot (R_2^2 - R_1^2) \cdot \left( 1 + \frac{(R_1 + R_2)^2}{8 \cdot R_1 \cdot R_2} \right) \cdot (r - R_1)(r - R_2). \quad (16)$$

Не повторяя уже известных рассуждений для круглой пластины на основании Винклера, можно получить для кольца на основании Винклера следующее решение:

$$w(r) = \frac{6 \cdot (1-\nu)}{\pi \cdot E \cdot h^3 \cdot R_2} \cdot (1-\beta) \cdot \left( M_2 - R_2 \frac{M_1}{R_1} \right) \cdot (r - R_1)(r - R_2),$$

$$\text{где } \beta = \frac{1}{5} \frac{(1-\nu)}{E \cdot h^3 \cdot R_2} \cdot \frac{E_V}{h_V} (R_2 - R_1)^3 (3R_1^2 + 4R_1R_2 + 3R_2^2). \quad (17)$$

При ограничении  $\beta < 1$  на соотношение физических и геометрических параметров:

$$\frac{h_V}{E_V} > \frac{1}{5} \frac{(1-\nu)}{E \cdot h^3 \cdot R_2} \cdot (R_2 - R_1)^3 (3R_1^2 + 4R_1R_2 + 3R_2^2). \quad (18)$$

Интенсивность вертикальной реакции при оперании пластины по периметру равна  $-\frac{1-\beta}{R_1+R_2} \int_{R_1}^{R_2} q(r) \cdot r dr$ .

### Определение низшей собственной частоты концентрических колец и колец на основании Винклера

В данном случае, как и ранее  $q(r,t) = -w''(r,t) \cdot \rho \cdot h$ , тогда эквивалентные моменты вычисляются следующим образом:

$$M_1 = -2\pi \cdot \rho \cdot h \int_{R_1}^{(R_1+R_2)/2} w''(r,t) \cdot r^2 dr, \quad M_2 = 2\pi \cdot \rho \cdot h \int_{(R_1+R_2)/2}^{R_2} w''(r,t) \cdot r^2 dr.$$

Из (15) получаем уравнение для определения низшей собственной частоты:

$$w(r) = \frac{12 \cdot (1-\nu)}{E \cdot h^2} \cdot \rho \times \left( \frac{1}{R_2} \int_{(R_1+R_2)/2}^{R_2} w''(r,t) \cdot r^2 dr + \frac{1}{R_1} \int_{R_1}^{(R_1+R_2)/2} w''(r,t) \cdot r^2 dr \right) \cdot (r - R_1)(r - R_2). \quad (19)$$

Далее, предполагая по аналогии с (16), исходя из анализа размерностей, получаем:

$$w(r,t) = \frac{4 \cdot (1-\nu)}{E \cdot h^2} \cdot \omega^2 \cdot \rho \cdot (R_2^2 - R_1^2) \cdot \left( 1 + \frac{(R_1 + R_2)^2}{8 \cdot R_1 R_2} \right) \cdot (r - R_1)(r - R_2) \cdot T(t). \quad (20)$$

где  $T(t)$  – некоторая функция времени, удовлетворяющая уравнению  $T(t) = -\frac{1}{\omega^2} \cdot T''(t)$ ;

$\omega$  – низшая собственная частота колебаний кольца.

Подставляя (20) в (19), получаем:

$$\frac{T(t)}{T''(t)} = \frac{12 \cdot (1-\nu)}{E \cdot h^2} \cdot \rho \times \left( \frac{1}{R_2} \int_{(R_1+R_2)/2}^{R_2} (r-R_1)(r-R_2) \cdot r^2 dr + \frac{1}{R_1} \int_{R_1}^{(R_1+R_2)/2} (r-R_1)(r-R_2) \cdot r^2 dr \right).$$

Из последнего уравнения можно получить, что:

$$\omega^{-2} = \frac{(1-\nu)}{E \cdot h^2} \cdot \rho \cdot \frac{(R_2 - R_1)^3 \cdot (R_1 + R_2) \cdot (9 \cdot R_1^2 + 62 \cdot R_1 \cdot R_2 + 9 \cdot R_2^2)}{80 \cdot R_1 \cdot R_2}.$$

Таким образом, низшая собственная частота кольцевой пластины при колебаниях чистого изгиба определяется выражением:

$$\omega = \sqrt{80 \frac{E}{(1-\nu)} \frac{h^2 \cdot R_1 \cdot R_2}{\rho \cdot (R_2 - R_1)^3 \cdot (R_1 + R_2) \cdot (9 \cdot R_1^2 + 62 \cdot R_1 \cdot R_2 + 9 \cdot R_2^2)}}.$$

Соответственно при колебаниях пластины на основании Винклера с использованием (17) при принятых ограничениях (18) уравнение для определения низшей частоты принимает вид:

$$w(r) = \frac{12 \cdot (1-\nu)}{E \cdot h^2} \cdot \rho \cdot (1-\beta) \times \left( \frac{1}{R_2} \int_{(R_1+R_2)/2}^{R_2} w''(r,t) \cdot r^2 dr + \frac{1}{R_1} \int_{R_1}^{(R_1+R_2)/2} w''(r,t) \cdot r^2 dr \right) \cdot (r-R_1)(r-R_2).$$

С учетом ограничений (18) низшая собственная частота определяется выражением:

$$\omega = \sqrt{80 \frac{E}{(1-\nu)} \frac{h^2 \cdot R_1 \cdot R_2}{\rho \cdot (1-\beta) \cdot (R_2 - R_1)^3 \cdot (R_1 + R_2) \cdot (9 \cdot R_1^2 + 62 \cdot R_1 \cdot R_2 + 9 \cdot R_2^2)}}.$$

### Результаты и выводы

Впервые разработана теория чистого изгиба круглых и кольцевых пластин моментами постоянной интенсивности, приложенными к их круговым границам.

Предложен метод определения эквивалентных моментов по действующей осесимметричной нагрузке, как для круглых, так и для кольцевых пластин.

В рамках предлагаемой теории продемонстрированы решения задач изгиба круглых и кольцевых пластин, расположенных на основании Винклера.

Впервые предложена методика определения низшей собственной частоты как круглых, так и кольцевых пластин в рамках предлагаемой теории чистого изгиба.

Предложена также методика учета наличия основания Винклера под пластинами на низшую собственную частоту.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Godio M., Beyer K. Analytical model for the out-of-plane response of vertically spanning unreinforced masonry walls // *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, V. 46, 2017, N. 15, P. 2757-2776.
2. Tomassetti U., Graziotti F., Penna A., Magenes G. Modelling one-way out-of-plane response of single leaf and cavity walls // *Engineering Structures*, 167, 2018. P 241–255. DOI: 10.1016/j.engstruct.2018.05.055.
3. João Paulo Silva Lima, Marcelo Langhinrichs Cunha, Elizaldo Dominguesdos Santos, Luiz Alberto Oliveira Rocha, Mauro de Vasconcellos Real, Liércio André Isoldi. Constructal Design for the ultimate buckling stress improvement of stiffened plates submitted to uniaxial compressive load // *Engineering Structures*, V. 203, 2020, 109883 DOI: 10.1016/j.engstruct.2019.109883.
4. Садигов, И.Р. Исследование устойчивости многослойных круглых пластин переменной толщины из нелинейно-упругого материала / И.Р. Садигов // *Международный научно-исследовательский журнал*. – 2019. – № 7(85), Ч. 1. – С. 31-37. – DOI: 10.23670/IRJ.2019.85.7.006.
5. Soumen Shaw. Bending of a Thin Rectangular Isotropic Micropolar Plate // *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*. V.20. 2019. No1. P.64-71. DOI: 10.1080/15502287.2019.1568616.
6. Ермоленко, А.В. Расчет круглых пластин по уточненным теориям / А.В. Ермоленко // *Вестник Сыктывкарского университета*. – 2006. – Сер. 1, Вып. 6. – С. 79-86.
7. Журавков, М.А. Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М.А. Журавков, Э.И. Старовойтов. – Минск : БГУ, 2011. – 543 с.
8. Тимошенко, С.П. Пластинки и оболочки / С.П. Тимошенко, С. Войновский-Кригер. – Москва : Наука, 1966. – 636 с.
9. Кравчук, А.С. Чистый изгиб наследственно вязкоупругопластических прямоугольных пластин / А.С. Кравчук, А.И. Кравчук, С.А. Томилин, С.Ф. Годунов // *Инженерный вестник Дона*. – 2019. – № 9. – URL : <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/N9y2019/6170> (дата обращения: 02.03.2020).
10. Кравчук, А.С. Полное решение задачи Ляме для толстостенного в среднем изотропного цилиндра из нелинейно-деформируемых материалов / А.С. Кравчук, А.И. Кравчук, С.Н. Лопатин // *Строительные материалы и изделия*. – 2019. – Т. 2, № 4. – С. 64-72.
11. Дородов, П.В. О краевой задаче теории упругости в полярной системе координат / П.В. Дородов // *Инженерный вестник Дона*. – 2015. – № 1. – URL : <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2015/2800> (дата обращения: 02.03.2020).
12. Кравчук, А.С. Оценка упругопластических прогибов круглых и кольцевых пластин под действием осесимметричных поперечных нагрузок / А.С. Кравчук, А.И. Кравчук // *Вестник науки и образования Северо-Запада России*. – 2019. – Т. 5, №3. – URL : <http://vestnik-nauki.ru/wp-content/uploads/2019/10/2019-N3-Kravchuk.pdf> (дата обращения: 10.10.19).

## REFERENCES

- [1] Godio M., Beyer K. Analytical Model for the Out-Of-Plane Response of Vertically Spanning Unreinforced Masonry Walls. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*. V. 46. 2017. No 15. P.2757-2776 (in English).
- [2] Tomassetti U., Graziotti F., Penna A., Magenes G. Modelling One-Way Out-Of-Plane Response of Single Leaf and Cavity Walls. *Engineering Structures*, 167. 2018. P.241-255. DOI: 10.1016/j.engstruct.2018.05.055 (in English).
- [3] João Paulo Silva Lima, Marcelo Langhinrichs Cunha, Elizaldo Dominguesdos Santos, Luiz Alberto Oliveira Rocha, Mauro de Vasconcellos Real, Liércio André Isoldi. Constructal Design for the Ultimate Buckling Stress Improvement of Stiffened Plates Submitted to Uniaxial Compressive Load. *Engineering Structures*. V.203. 2020. 109883 DOI: 10.1016/j.engstruct.2019.109883 (in English).
- [4] Sadigov I.R. Issledovanie ustojchivosti mnogoslojnyh kruglyh plastin peremennoj tolshhiny iz nelinejno-uprugogo materiala [The Study of the Stability of Multilayer Round Plates of Variable Thickness from a Nonlinear Elastic Material]. *Mezhdunarodnyj nauchno-issledovatel'skij zhurnal*

- [International Scientific Journal]. 2019, № 7(85). Ch.1. P. 31-37. DOI: 10.23670/IRJ.2019.85.7. (in Russian).
- [5] Soumen Shaw. Bending of a Thin Rectangular Isotropic Micropolar Plate. International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics, V.20. 2019. No 1. P. 64-71. DOI: 10.1080/15502287.2019.1568616 (in English).
- [6] Ermolenko A.V. Raschet kruglyh plastin po utochnennym teorijam [Calculation of Round Plates According to Revised Theories]. Vestnik Syktyvkar'skogo universiteta [Bulletin of the Syktyvkar University]. Ser. 1. V.6. 2006. P. 79-86 (in Russian).
- [7] Zhuravkov M.A., Starovojtov Je.I. Mehanika sploshnyh sred. Teorija uprugosti i plastichnosti [Continuum Mechanics. Theory of Elasticity and Plasticity]. Minsk: BGU, 2011. 543 p. (in Russian).
- [8] Timoshenko S.P., Vojnovskij-Kriger S. Plastinki i obolochki [Plates and Shells]. Moskow: Nauka, 1966. 636 p. (in Russian).
- [9] Kravchuk A.S., Kravchuk A.I., Tomilin S.A., Godunov S.F. Chistyj izgib nasledstvenno vjzakuprugoplasticheskikh prjamougol'nyh plastin [Pure Bending of Hereditarily Viscoelastic Plastic Rectangular Plates]. Inzhenernyj vestnik Dona [Engineering Bulletin of the Don]. № 9. 2019. URL: <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/N9y2019/6170-02.03.2020> (in Russian).
- [10] Kravchuk A.S., Kravchuk A.I., Lopatin S.N. Polnoe reshenie zadachi Ljame dlja tolstostennogo v srednem izotropnogo cilindra iz nelinejno-deformiruemyh materialov [Complete Solution of the Ljame Problem for an Average Thick-Walled Isotropic Cylinder of Non-Linearly Deformable Materials]. Stroitel'nye materialy i izdelija [Building Materials and Products]. 2019. V 2. №4. P.64-72 (in Russian).
- [11] Dorodov P.V. O kraevoj zadache teorii uprugosti v poljarnoj sisteme koordinat [The Boundary Value Problem of the Theory of Elasticity in the Polar Coordinate System]. Inzhenernyj vestnik Dona [Engineering Bulletin of the Don]. № 1. 2015. URL: <http://www.ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1y2015/2800-02.03.2020> (in Russian).
- [12] Kravchuk A.S., Kravchuk A.I. Ocenka uprugoplasticheskikh progibov kruglyh i kol'cevyyh plastin pod dejstviem osesimmetrichnyh poperechnykh nagruzok [Evaluation of Elastoplastic Deflections of Round and Annular Plates under the Action of Axisymmetric Transverse Loads]. Vestnik nauki i obrazovanija Severo-Zapada Rossii [Bulletin of Science and Education of the North-West of Russia]. 2019. V 5. № 3. URL: <http://vestnik-nauki.ru/wp-content/uploads/2019/10/2019-N3-Kravchuk.pdf> – 10.10.19 (in Russian).

## New Approaches to the Calculation of Round and Annular Plate Bending, as Well as Estimation of Their Lowest Natural Frequencies

**A.S. Kravchuk<sup>\*1</sup>, S.A. Tomilin<sup>\*\*2</sup>, A.I. Kravchuk<sup>\*\*\*3</sup>, S.F. Godunov<sup>\*\*4</sup>, A.F. Smaliuk<sup>\*\*\*5</sup>**

*\*Polytechnic Research Institute, a branch of the Belarusian National Technical University, Independence Avenue, 65, Minsk, Republic of Belarus 220013*

*\*\*Volgodonsk Engineering Technical Institute the branch of National Research Nuclear University «MEPhI», Lenin St., 73/94, Volgodonsk, Rostov region, Russia 347360*

*\*\*\*Belarusian State University, Independence Avenue, 4, Minsk, Republic of Belarus 220030*

<sup>1</sup>ORCID iD: 0000-0002-4730-7769

Wos Researcher ID: AAB-7774-2019

e-mail: ask\_belarus@inbox.ru

<sup>2</sup>ORCID iD: 0000-0001-8661-8386

Wos Researcher ID: G-3465-2017

e-mail: SATomilin@mephi.ru

<sup>3</sup>ORCID iD: 0000-0002-6105-4200

Wos Researcher ID: AAB-7880-2019

e-mail: anzhelika.kravchuk@gmail.com

<sup>4</sup>e-mail: SFGodunov@mephi.ru

<sup>5</sup>ORCID iD: 0000-0001-6872-023X

Wos Researcher ID: AAH-1030-2020

e-mail: asmaliuk@gmail.com

**Abstract** – The transverse movements of the plates of constant thickness are assumed to be small. In this case the plates are bent by moments applied at the edge with constant intensity. For the first time, a theory of the pure bending of round and annular plates by moments of constant intensity applied to their circular boundaries. Pure bending is understood as a stress-strain state in which

shears in the plates are completely absent. Within the framework of the accepted hypotheses, the normal radial deformations of the plates are determined. Based on the continuity equation in the axisymmetric case, it was established that the normal radial and circumferential strains coincide. Using Hooke's law, the normal stresses acting in the plates are determined. Based on the equilibrium equations, the moments necessary for bending the plates to a given curvature are calculated. A differential equation is obtained for determining small lateral displacements of plates under the action of moments of constant intensity applied to the edge of the plate. The solution of this equation is obtained in elementary form for the case of articulating plates around the perimeter. To proceed for solving the problems of plate bending by a transverse normal load, a method for determining equivalent moments from the acting axisymmetric load, both for round and ring plates is proposed. To satisfy the equilibrium conditions for the plates under consideration of the action of a transverse load, it is assumed that the magnitude of the vertical reaction on the supports along the perimeter is uniformly distributed and equal to the integral value of the normal load divided by the length of the perimeter. As an example, the problems of bending plates under their own weight with articulated support are solved. Within the framework of the proposed theory, solutions to the problems of bending round and annular plates located on the Winkler base are demonstrated. For the first time, a technique has been proposed for determining the lowest natural frequency of both round and annular plates in the framework of the proposed theory of pure bending. A technique is also proposed for taking into account the influence of the Winkler base under the plates on the lower natural frequency.

*Keywords:* pure bend, round plate, ring plate, calculation of equivalent moment, Winkler base, lowest natural frequency.