ГЛОБАЛЬНАЯ ЯДЕРНАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ, 2019 №4(33), С. 37–42

ИЗЫСКАНИЕ, ПРОЕКТИРОВАНИЕ, СТРОИТЕЛЬСТВО И МОНТАЖ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ

УДК 539.3

К ВОПРОСУ ОБ ОБОСНОВАННОЙ ФОРМЕ НАСЛЕДСТВЕННОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ С ОДНИМ ЯДРОМ ПОЛЗУЧЕСТИ

© 2019 А.С. Кравчук*, А.И. Кравчук**

**Белорусский национальный технический университет, Минск, Республика Беларусь*
***Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь*

Установлено, что если исходные уравнения наследственной вязкоупругости в развернутом виде содержали два независимых оператора вязкоупругости, соответствующих осевой и поперечной деформациям ползучести, то запись в компонентах девиаторов уравнений состояния будет содержать уже три различных ядра вязкоупругости, определенных композициями исходных двух операторов. Эти три оператора могут совпадать с точностью до вещественного множителя только в случае, когда выполняется гипотеза Арутюняна о постоянстве поперечной деформации (т.е. постоянстве коэффициента Пуассона) во время ползучести. Тела с подобным вязкоупругим поведением принято называть квазиупругими. С учетом результатов исследований, а также того, что до настоящего времени экспериментально устанавливалось только ядро ползучести при осевом растяжении и никогда не устанавливалось ядро поперечной ползучести, в настоящее время решать задачи наследственной ползучести за пределами применения гипотезы Арутюняна не представляется возможным. Также очевидно, что оператор объемной деформации не может быть тождественным, поскольку определяется композицией операторов ползучести. Применение же некоторыми авторами в своих исследованиях гипотезы о тождественности оператора не имеет под собой ни математических, ни физических оснований. В случае нелинейной вязкоупугости (или вязкоупругопластичности), с достаточной для практики точностью следует просто линеаризовать с помощью секущего модуля уравнение состояния и свести эти задачи к уже исследованному в данной статье случаю линейной вязкоупругости.

Ключевые слова: квазиупругость, наследственная вязкоупругость, ядро ползучести, релаксация, гипотеза Арутюняна.

Поступила в редакцию: 09.10.2019
После доработки 16.10.2019
Принята к публикации 21.10.2019

Введение

Не смотря на большое число публикаций, посвященных вязкоупругому поведению материалов [1, 2], до настоящего времени в литературе практически отсутствовали попытки систематического исследования самих уравнений наследственной вязкоупругости. Даже статья авторов [3] не в полной мере ответила на вопросы, возникающие при решении задач вязкоупугости.

Авторами [3] ранее уже отмечалось, что гипотеза о чистой упругости объемной деформации вязкоупругого тела [2] выглядит совершенно искусственно. Однако формальных обоснований, кроме физической логики и рассуждений, основанных на суперпозиции, представлено не было.

В данной статье впервые систематически сделан переход от уравнений наследственной вязкоупругости Ржаницына [1] к уравнениям в виде развернутой записи девиаторов. Это позволило установить, что исходя из двух независимых операторов вязкоупугости для продольной и поперечной деформации в развернутой записи наследственных уравнений состояния исследователь обязан рассмотреть три различные ядра для вязкоупуогого поведения материала при переходе к записи этих же уравнений, но в компонентах девиаторов. При этом эти ядра могут совпадать, но только в случае использования гипотезы Арутюняна [4] о постоянстве поперечной деформации, т.е. постоянстве коэффициента Пуассона.

Учитывая, что по испытаниям в настоящее время доступны только данные по ползучести (или релаксации) при осевом растяжении образцов, гипотеза Арутюнана является единственно возможной гипотезой для решения вязкоупругих задач в настоящее время.

Преобразование основных уравнений

Запишем общие уравнения изотропной вязкоупругости [1] с использованием компонент деформаций по Коши в Декартовой системе координат (x_1, x_2, x_3) с использованием операторов:

$$\begin{gathered}
\Lambda^{-1}[\varepsilon_{11}] = \frac{1}{E}\cdot\left(\sigma_{11} - \nu\cdot\Omega[\sigma_{22}+\sigma_{33}]\right),\\
\Lambda^{-1}[\varepsilon_{22}] = \frac{1}{E}\cdot\left(\sigma_{22} - \nu\cdot\Omega[\sigma_{11}+\sigma_{33}]\right),\\
\Lambda^{-1}[\varepsilon_{33}] = \frac{1}{E}\cdot\left(\sigma_{33} - \nu\cdot\Omega[\sigma_{22}+\sigma_{11}]\right),\\
\varepsilon_{ij} = \frac{1}{G}\cdot\Lambda[\sigma_{ij}],\ (i\neq j; i=\overline{1,3};\ j=\overline{1,3})
\end{gathered} \tag{1}$$

$$\Lambda[f] = f(t) + \int_0^t f(\tau)\cdot\Gamma_E(t,\tau)d\tau, \qquad \Lambda^{-1}[f] = f(t) - \int_0^t f(\tau)\cdot R_E(t,\tau)d\tau,$$

$$\Omega[f] = f(t) + \int_0^t f(\tau)\cdot\Gamma_\nu(t,\tau)d\tau,$$

где E – модуль упругости;

ν – коэффициент Пуассона;

$\Gamma_E(t,\tau)$ – ядро ползучести при простейших нагружениях (растяжении/сжатии или сдвиге);

$R_E(t,\tau)$ – резольвентное ядро релаксации при растяжении/сжатии или сдвиге;

$\Gamma_\nu(t,\tau)$ – ядро поперечной ползучести образца при одноосном нагружении.

Сложим первые три уравнения системы (1) для нормальных деформаций:

$$\Lambda^{-1}[\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}] = \frac{1}{E}\cdot\left((\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}) - 2\cdot\nu\cdot\Omega[\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}]\right). \tag{2}$$

Используя тождественный оператор $\mathrm{I}f = f$, уравнение (2) можно переписать:

$$\begin{gathered}
\Lambda^{-1}[\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}] = \frac{1}{E}\cdot\left(\mathrm{I}[\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}] - 2\cdot\nu\cdot\Omega[\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}]\right) =\\
= \frac{1}{E}\cdot(\mathrm{I} - 2\cdot\nu\cdot\Omega)[\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}].
\end{gathered} \tag{3}$$

Разделим на 3 уравнение (2) и вычтем результат из первого уравнения системы (1):

$$\Lambda^{-1}\left[\varepsilon_{11}-\frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}}{3}\right]=\frac{1}{E}(\mathrm{I}+\nu\cdot\Omega)\cdot\left[\sigma_{11}-\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}\right].$$

Далее по аналогии для всех нормальных деформаций из системы (1) можно получить:

$$\varepsilon_{ii}-\frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}}{3}=\frac{1}{E}\Lambda\circ(\mathrm{I}+\nu\cdot\Omega)\cdot\left[\sigma_{ii}-\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}\right],\left(i=\overline{1,3}\right) \quad (4)$$

Дополняя уравнения (3) и (4) уравнениями для сдвиговых деформаций, выводим полную систему уравнений состояния для наследственной вязкоупругости в развернутой записи компонентов девиаторов:

$$\varepsilon_{ii}-\frac{\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}}{3}=\frac{1}{E}\Lambda\circ(\mathrm{I}+\nu\cdot\Omega)\cdot\left[\sigma_{ii}-\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}\right]\left(i=\overline{1,3}\right), \quad (5)$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{G}\cdot\Lambda\left[\sigma_{ij}\right],\ (i\neq j; i=\overline{1,3}; j=\overline{1,3}), \quad (6)$$

$$\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}=\frac{1}{E}\cdot\Lambda\circ(\mathrm{I}-2\cdot\nu\cdot\Omega)\left[\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}\right]. \quad (7)$$

Выводы

Очевидно, что если уравнения (1) содержали два независимых оператора вязкоупругости с двумя различными ядрами $\Gamma_E(t,\tau)$ и $\Gamma_\nu(t,\tau)$, то явная запись в девиаторах урванений состояния (5)-(7) будет содержать уже три различных ядра вязкоупругости, соответствующих различным операторам $\Lambda\circ(\mathrm{I}+\nu\cdot\Omega)$, Λ, $\Lambda\circ(\mathrm{I}-2\cdot\nu\cdot\Omega)$. Эти три оператора могут совпадать с точностью до вещественного множителя только в случае когда оператор Ω является тождественным, т.е. тогда когда выполняется гипотеза Арутюняна [4] о постоянстве поперечной деформации (т.е. постоянстве коэффициента Пуассона) во время ползучести. Тела с подобным вязкоупругим поведением принято называть квазиупругими [1].

С учетом всего сказанного, а также того, что до настоящего времени экспериментально устанавливалось только ядро $\Gamma_E(t,\tau)$ оператора Λ (или резольвентное ему ядро $R_E(t,\tau)$) и никогда не устанавливалось ядро поперечной ползучести $\Gamma_\nu(t,\tau)$, в настоящее время решать задачи наследственной ползучести за пределами применения гипотезы Арутюняна [4] не представляется возможным.

Также очевидно, что оператор $\Lambda\circ(\mathrm{I}-2\cdot\nu\cdot\Omega)$ в (7) не может быть с тождественным с точностью до мультипликативной константы, поскольку и оператор Λ, и оператор $(\mathrm{I}-2\cdot\nu\cdot\Omega)$ никогда не могут быть взаимообратными (Λ и Ω – операторы ползучести).

Применение же некоторыми авторами [2] в своих исследованиях гипотезы о тождественности оператора $\Lambda\circ(\mathrm{I}-2\cdot\nu\cdot\Omega)$ не имеет под собой ни математических, ни физических оснований.

Из работы авторов [3] видно, что если решать краевую задачу вязкоупругости для невесомого квазиупругого (гипотеза Арутюняна) тела при постоянных граничных условиях по перемещениям, исследователь получит чистую релаксацию в твердом теле без ползучести, а при решении краевой задачи с постоянными краевыми напряжениями будет рассматриваться случай чистой ползучести без релаксации.

Так, например, если рассмотреть осесимметричную задачу Буссинеска о воздействии постоянной вертикальной сосредоточенной силы на упругое полупространство, которое дает решение для вертикальных перемещений поверхности полупространства в виде функции $w(0,r)$, то решение задачи наследственной квазиупругости будет определяться выражением:

$$w(0,r)\cdot\left(1+\int\limits_0^t \Gamma_E(t,\tau)d\tau\right).$$

Исключение составляют только контактные задачи вязкоупругости с изменяющейся областью контакта [4-6]. Из-за изменяющейся области контакта в этих задачах будет присутствовать и ползучесть, и релаксация.

В связи с этим полученные другими авторами [2, 7-9] решения для вязкоупругости при использовании гипотезы тождественности с точностью до коммутативной константы оператора $\Lambda\circ(\mathrm{I}-2\cdot\nu\cdot\Omega)$, приводящее к наличию обоих процессов и релаксации, и ползучести [2, 10, 11], даже при постоянных краевых условиях нельзя считать достоверными.

Более того, очевидно, что в случае нелинейной вязкоупругости (или вязкоупругопластичности [2, 7, 9, 11]), с достаточной для практики точностью следует просто линеаризовать, аналогично [12] с помощью секущего модуля уравнение состояния и свести эти задачи к уже исследованному в данной статье случаю линейной вязкоупругости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ржаницын, А. Р.* Теория ползучести / А. Р. Ржаницын. – Москва : Стройиздат, 1968. – 418 с.
2. *Горшков, А. Г.* Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций / А. Г. Горшков, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 576 с.
3. *Кравчук, А. С.* Общие уравнения пространственной и плоской задач механики твердого тела в случае использования модели квазиупругого поведения изотропного вязкоупругого материала / А. С. Кравчук, А. И. Кравчук // Машиностроение : сетевой электронный научный журнал. – 2017. – Том 5, №1. – С. 3-10. – URL : http://www.indust-engineering.ru/issues /2017/2017-1.pdf (дата обращения: 21.09.2019)
4. *Кравчук, А. С.* Механика контактного взаимодействия / А. С. Кравчук, А. В. Чигарев. – Минск : Технопринт, 2000. – 196 с.
5. *Кравчук, А. С.* Простейшая модель индентирования криволинейных биологических объектов конечных размеров / А. С. Кравчук, С. А. Чижик, А. И. Кравчук //APRIORI. Серия: Естественные и технические науки. – 2014. – № 4. – URL: http://apriori-journal.ru/seria2/4-2014/Kravchuk-Chizhik-Kravchuk.pdf (дата обращения: 21.09.2019)
6. *Кравчук, А. С.* Прикладные контактные задачи для обобщенной стержневой модели покрытия / А. С. Кравчук, А. И. Кравчук. – Санкт-Петербург : Наукоемкие технологии, 2019. – 221 с. – URL: http://publishing.intelgr.com/archive/core_model.pdf (дата обращения: 21.09.2019)
7. *Старовойтов, Э. И.* Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки / Э. И. Старовойтов. – Гомель : БелГУТ, 2002. - 343 с.
8. *Плескачевский, Ю. М.* Деформирование металлополимерных систем / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, А. В. Яровая. – Минск : Беларуская навука, 2004. – 342 с.
9. *Журавков, М. А.* Механика сплошных сред. Теория упругости и пластичности / М. А. Журавков, Э. И. Старовотов. – Минск: БГУ, 2011. – 543 с.
10. *Плескачевский, Ю. М.* Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием / Ю. М. Плескачевский, Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко – Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.

11. *Starovoitov, E.I. Nagiyev, F.B.* Foundations of the theory of elasticity, plasticity and viscoelasticity. Apple Academic Press, Toronto, New Jersey, Canada, USA, 2012. – 346 p.
12. *Кравчук, А. С.* Решение физически нелинейной задачи Ляме для толстостенного цилиндра / А. С. Кравчук, А. И. Кравчук, С. Н. Лопатин // Наука и бизнес: пути развития. – 2018. – № 5(83). – С. 11-16.

REFERENCES

[1] Rzhanitsyn A.R. Teoriya polzuchesti [Theory of Creep]. Moskva: Strojizdat [Moscow: Stroyizdat]. 1968. 418 p. (in Russian).
[2] Gorshkov A.G. Starovoitov E.I., Yarovaya A.V. Mexanika sloisty`x vyazkouprugoplasticheskix e`lementov konstrukcij [Mechanics of Layered Viscoelastic Structural Elements]. Moskva: FIZMATLIT [Moscow: FIZMATLIT]. 2006. 576 p. (in Russian).
[3] Kravchuk A.S., Kravchuk A.I. Obshhie uravneniya prostranstvennoj i ploskoj zadach mexaniki tverdogo tela v sluchae ispol`zovaniya modeli kvaziuprugogo povedeniya izotropnogo vyazkouprugogo materiala [General Equations of Spatial and Plane Problems of Solid Mechanics in the Case of Using a Model of Quasi-Elastic Behavior of an Isotropic Viscoelastic Material]. Mashinostroenie: setevoj e`lektronny`j nauchny`j zhurnal [Russian Internet Journal of Industrial Engineering]. 2017. V 5, № 1. P. 3-10. URL : http://www.indust-engineering.ru/issues/2017/2017-1.pdf (in Russian).
[4] Kravchuk A.S., Chigarev A.V. Mexanika kontaktnogo vzaimodejstviya [Mechanics of Contact Interaction]. Minsk : Texnoprint [Minsk: Technoprint]. 2000. 196 p.
[5] Kravchuk A.S., Chizhik S.A., Kravchuk A.I. Prostejshaya model' indentirovaniya krivolinejnyx biologicheskix ob"ektov konechnyx razmerov [The Simplest Model of Indentation of Curvilinear Biological Objects of Finite Dimensions]. APRIORI. Seriya: Estestvennye i texnicheskie nauki [APRIORI. Series: Natural and Technical Sciences]. 2014. № 4. URL: http://apriori-journal.ru/seria2/4-2014/Kravchuk-Chizhik-Kravchuk.pdf (in Russian).
[6] Kravchuk A.S., Kravchuk A.I. Prikladnye kontaktnye zadachi dlya obobshhennoj sterzhnevoj modeli pokrytiya [Applied Contact Problems for a Generalized Rod Model of Coverage] Sankt-Peterburg: Naukoemkie texnologii [Saint Petersburg: High Technologies]. 2019. 221 p. URL: http://publishing.intelgr.com/archive/core_model.pdf (in Russian).
[7] Starovojtov E. I. Vyazkouprugoplasticheskie sloistye plastiny i obolochki [Viscoelastic Plastic Laminated Plates and Shells] Gomel': BelGUT [Gomel: BelGUT]. 2002. 343 p. (in Russian).
[8] Pleskachevskij Yu.M., Starovojtov E'.I., Yarovaya A.V. Deformirovanie metallopolimernyx sistem [Deformation of Metal-Polymer Systems]. Minsk: Belaruskaya navuka [Minsk: Belarusian Science]. 2004. 342 p. (in Russian).
[9] Zhuravkov M.A., Starovotov E.I. Mexanika sploshnyx sred. Teoriya uprugosti i plastichnosti [Continuum Mechanics. Theory of Elasticity and Plasticity]. Minsk: BGU [Minsk: BSU]. 2011. 543 p. (in Russian).
[10] Pleskachevskij Yu.M., Starovojtov E.I., Leonenko D.V. Mexanika trexslojnyx sterzhnej i plastin, svyazannyx s uprugim osnovaniem [Mechanics of Three-Layer Rods and Plates Associated with an Elastic Base]. Moskva: FIZMATLIT [Moscow: FIZMATLIT]. 2011. 560 p. (in Russian).
[11] Starovoitov E.I., Nagiyev F.B. Foundations of the Theory of Elasticity, Plasticity and Viscoelasticity. Apple Academic Press, Toronto, New Jersey, Canada, USA, 2012. 346 p.
[12] Kravchuk A.S., Kravchuk A.I., Lopatin S.N. Reshenie fizicheski nelinejnoj zadachi Lyame dlya tolstostennogo cilindra [Solution of the Physically Nonlinear Lyame Problem for a Thick-Walled Cylinder]. Nauka i biznes: puti razvitiya [Science and Business: Ways of Development]. 2018. № 5(83). P. 11-16 (in Russian).

To the Issue of the Valid Form of Hereditary Viscoelasticity with One Creep Kernel

A.S. Kravchuk*1, A.I. Kravchuk2**

**Polytechnic Research Institute, a branch of the Belarusian National Technical University, Independence Avenue, 65, Minsk, Republic of Belarus 220013*
***Belarusian State University, Independence Avenue, 4, Minsk, Republic of Belarus 220030*

[1] *ORCID iD: 0000-0002-4730-7769*
Wos Researher ID: AAB-7774-2019
e-mail: ask_belarus@inbox.ru
[2] *ORCID iD: 0000-0002-6105-4200*
Wos Researher ID: AAB-7880-2019
e-mail: anzhelika.kravchuk@gmail.com

Abstract – It is established that if the original equations of hereditary viscoelasticity in the traditional form contained two independent viscoelastic operators corresponding to the axial and transverse creep strains, then the record in the components of the deviators of the state equations will already contain three different viscoelastic kernels defined by the compositions of the original two operators. These three operators can coincide up to a real factor only when the Harutyunyan hypothesis about the constancy of transverse deformation (i.e., the constancy of the Poisson's ratio) during creep is fulfilled. Body with a similar viscoelastic behavior are called quasi-elastic. Taking into account the results of studies, as well as the fact that until now only the creep kernel has been experimentally established under axial tension and the transverse creep kernel has never been defined, it is currently not possible to solve the problems of hereditary creep beyond the application of the Harutyunyan hypothesis. It is also obvious that the volumetric strain operator cannot be identical, since it is determined by the composition of the creep operators. The application by some authors in their studies of the hypothesis of the identity of the operator has no mathematical or physical grounds. In the case of nonlinear viscoelasticity (or viscoelastic plasticity), with sufficient accuracy for practice, one should simply linearize the equation of state using the secant module and reduce these problems to the case of linear viscoelasticity already studied in this article.

Keywords: Quasi-elasticity, hereditary viscoelasticity, creep core, relaxation, Harutyunyan hypothesis.